

FUNCIÓNES

UNIDAD DIDÁCTICA PARA 4ºB DE ESO

Yair Rodríguez Yanci

PÁGINA		
43	UN EJEMPLO	IES La Nucía
44	FUNCIONES	
45	LEER Y DIBUJAR GRÁFICAS	
47	DOMINIO Y CONTINUIDAD	
49	COLECCIONAR FUNCIONES	
50	FUNCIONES LINEALES	
51	FUNCIONES CUADRÁTICAS	
53	ECUACIONES CON GRÁFICAS	
54	CARACTERÍSTICAS Y TIPOS DE FUNCIONES	
56	EXPERIMENTOS Y PROYECTOS	
59	EVALUACIÓN	

El objetivo de esta Unidad es reconocer, representar, analizar, clasificar... **FUNCIONES**.

Está diseñada en base a **Actividades** a realizar por el alumnado, que irá construyendo su conocimiento mediante la práctica. Los **conceptos** se introducen de manera intuitiva y visual, dejando que las definiciones rigurosas sean introducidas por el profesor en clase o relegadas a cursos más avanzados, según convenga.

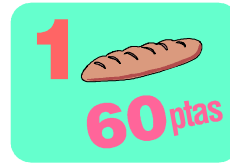
A esta Unidad de introducción al mundo de las funciones le siguen otras donde se profundiza en las funciones básicas y en las operaciones con las mismas y en el estudio de la continuidad por medio de límites.

Aunque se presente como una unidad de 4º B de ESO este tema es una introducción general sencilla a las **Funciones** y puede estudiarse, adaptada, en distintos cursos.



COMO 'FUNCIONAN' EN LA PANADERÍA

En la panadería de los padres de *Maité* hay una buena oferta esta semana: **Una barra de pan cuesta 60 ptas.** La oferta ha tenido tanto éxito que no paran de entrar familia tiene que echar una mano para atenderlos. Al contable antes de jubilarse, la cosa se le da muy bien y se multiplicando de memoria cada vez que atienden a un ptas... dos barras, 120... 5 barras, 300... 9 barras 540... 5



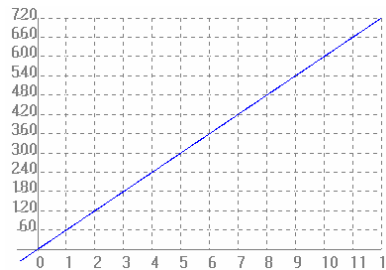
clientes y toda la abuelo, que fue pasa la mañana cliente: Una barra 60 barras, 300... 2

1	60
2	120
3	180
4	240
5	300
6	360
7	420

barras, 120... y no se cansa nunca. El padre de *Maité* no quiere hacer tantas cuentas y ha apuntado en un papel lo que cuesta el pan, según el número de barras que le pidan, y así no tiene más que mirar el papel y decir el precio. Su madre, por su parte, prefiere usar una calculadora y cada vez que alguien le pide, por ejemplo, 4 barras, ella coge la máquina y hace: $60 \times 4 = 240$ y lo tiene claro, aunque el abuelo sigue pensando que él lo hace más rápido.



¿Y qué piensa *Maité*? Ella estudia 4º de ESO y cuando quiere ayudar un poco, como está aburrida de hacer cálculos y se le da una gráfica con las cantidades y precios método más vistoso.



bien el dibujo, se ha hecho y presume de que tiene el

Aunque, claro, los demás no están de su sistema. ¿Qué opinas tu? ¿Crees que válidos? ¿Qué ventajas o inconvenientes tiene cada uno?

acuerdo y cada cual defiende los cuatro métodos son nientes tiene cada uno?

La cosa es opinable, porque en realidad todos son buenos y es cuestión de gustos. Vamos a analizar el asunto:

Se trata de relacionar dos cantidades, *el número de barras y el precio correspondiente* y hay cuatro métodos para hacerlo:



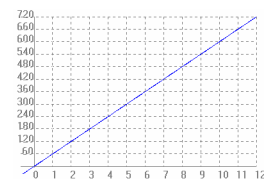
Descripción

1	60
2	120
3	180

Tabla de valores



Fórmula: Precio=60 x Cantidad



Gráfica

OTROS EJEMPLOS

El caso del pan es muy sencillo, pero estas ideas sirven en casos más difíciles. Trata de hacer lo mismo en otras situaciones, es decir, haz un cuadro de valores y una gráfica y busca una fórmula:

- 1 **Gasolina para el coche:** Si el litro de Super cuesta 120,45 ptas. analiza la situación para un coche que tiene un depósito cuya capacidad máxima es de 42 litros.
- 2 **Revelado de fotos:** Cuesta un fijo de 300 ptas. por carrete más 45 ptas. por cada foto revelada. Investiga todas las posibilidades si deseas revelar un carrete de 36 fotos.

RECORDAR

FUNCIONES

En el caso de la panadería hemos relacionado dos **magnitudes**, la **cantidad de panes** y el **precio**, que se miden en dos **unidades** distintas, **número de panes** y **pesetas**.

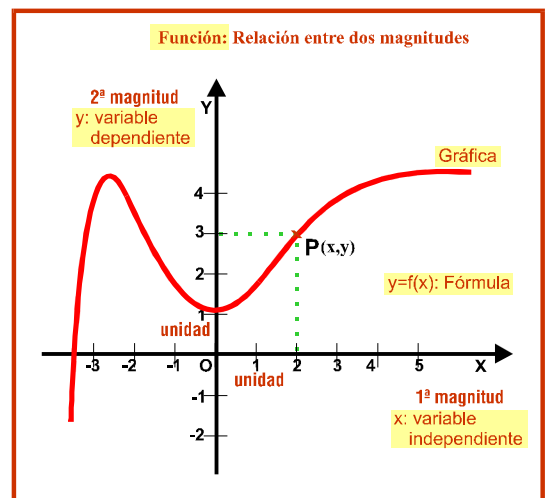
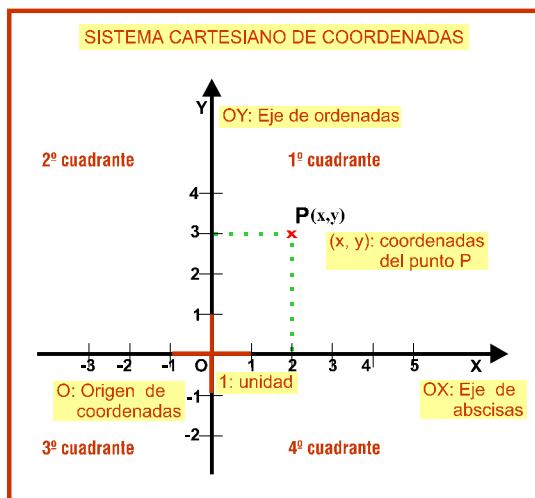
Es muy interesante poder relacionar distintos conceptos, porque así podemos conocer uno a partir del otro. Por ejemplo, en el ejercicio 1 de la pág. anterior, si el precio del litro de super es de 120'45 ptas., la **relación cantidad / precio**, medida en **litros / pesetas**, se puede escribir $P = 120'45 C$, donde C es el número de litros y P el precio correspondiente. Conocer una relación permite tomar decisiones a partir de uno de los datos; por ejemplo, podemos decir "póngame 30 litros de gasolina" y sabremos que hay que pagar $120'25 \times 30 = 3.607,50$ ptas. y también podremos decir "póngame 4.000 ptas. de gasolina" y nos pondrán $4.000/120'25 = 33'26$ litros.

Las Matemáticas estudian este tipo de relaciones, que pueden llegar a ser muy complicadas y tienen grandes aplicaciones en todos los terrenos. Aquí vamos a conocer relaciones de un cierto tipo, con unas ciertas condiciones, para poder trabajar con ellas con comodidad y precisión: Primero, deben relacionar números y, segundo, de una manera unívoca, es decir, a un número le corresponderá otro, pero sólo uno. A estas relaciones les llamaremos **funciones**:

Una función es una relación entre dos magnitudes, tal que a cada valor de la primera magnitud le corresponde un valor y sólo uno de la segunda.

Una **función** puede expresarse por una **descripción**, una **tabla de valores**, una **fórmula** o una **gráfica**. A veces nos convendrá una de esas expresiones y otras veces otras, por lo que aprenderemos a pasar de unas formas a

otras. En las figuras siguientes recordamos la forma de representar las gráficas y su nomenclatura.

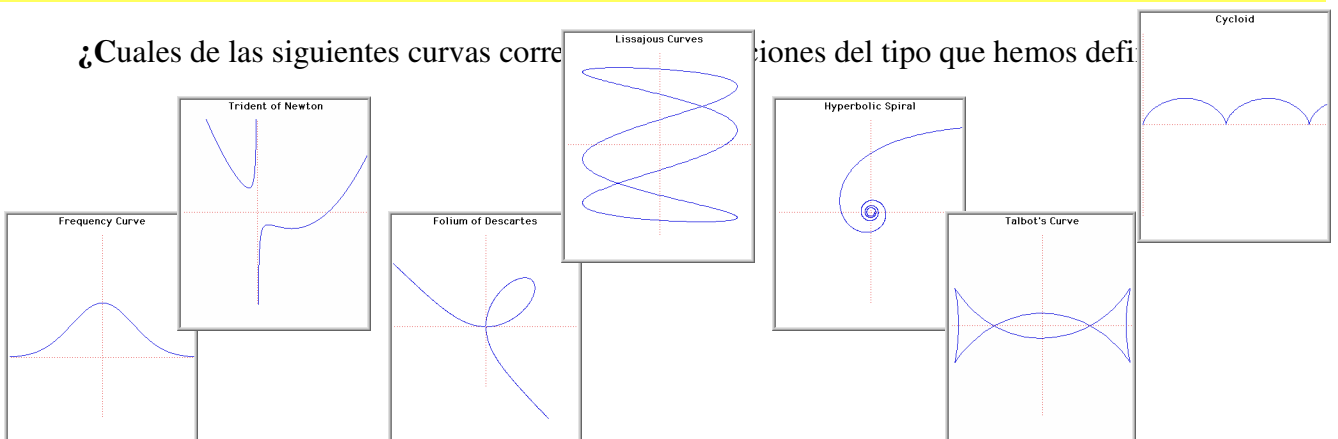


La **variable independiente** es la que se toma primero. En el ejemplo de la gasolina super puede ser la cantidad

(póngame 30 litros) o el precio (póngame 4.000 ptas.)
La **variable dependiente** es la que se obtiene después.

EJERCICIO

¿Cuales de las siguientes curvas corresponden al tipo de relaciones del tipo que hemos definido?

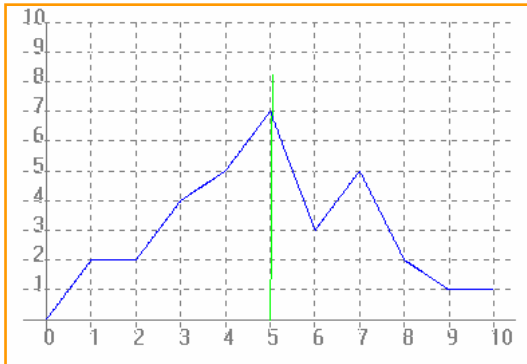


PRACTICAR

'LEER' GRÁFICAS

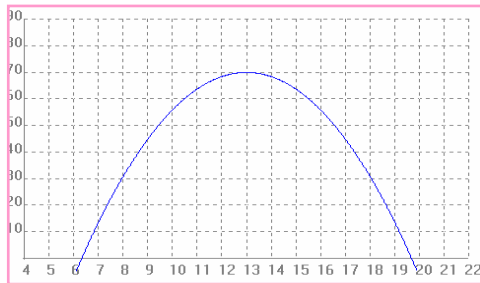
Las funciones relacionan magnitudes y las gráficas presentan información que se puede “leer” e interpretar. Observa e interpreta las gráficas de esta página contestando a las preguntas que se hacen.

- 1 Cuando preguntaron a la profesora de Matemáticas cuántos aprobados había, ella contestó “Aquí tenéis no sólo ese dato, sino muchos más” y colocó en el tablón de anuncios una gráfica como esta:



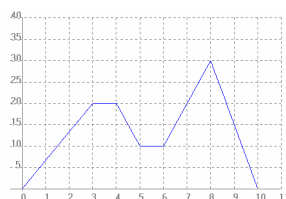
Trata de descifrarla: ¿Cuántos aprobaron?
¿Cuántos alumnos y alumnas había en la clase?
¿Cuántos sacaron menos de 4?

- 2 La siguiente gráfica muestra la altura del sol expresada en grados en un cierto día:

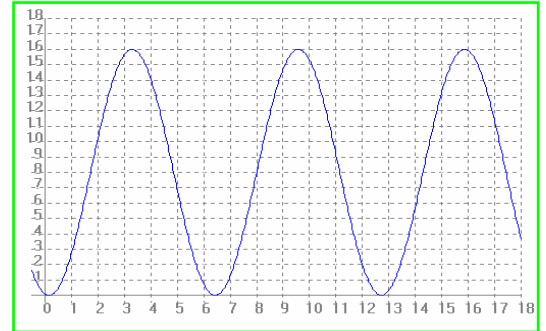


¿A qué hora salió el sol? ¿A qué hora se puso?
¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento?
¿A qué hora tuvo el sol la altura máxima y cuántos grados?
¿Cuántas horas de sol hubo ese día?

- 3 Describe la excursión que se muestra en esta gráfica: El eje OX es el **Tiempo**, en horas y El eje OY la distancia en kilómetros. ¿Crees que el regreso se hizo andando?

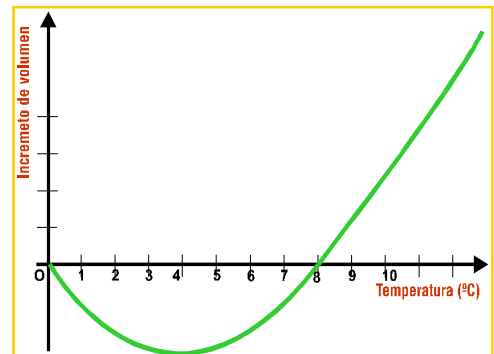


- 4 Las cestas de una noria suben y bajan mientras la noria gira. Esta es la gráfica de la relación **tiempo** (OX, en segundos) / **altura** de una de las cestas (OY, en metros):



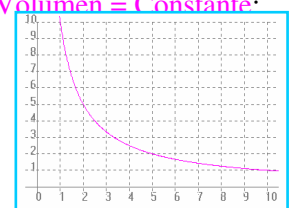
¿Cuánto tarda la noria en dar una vuelta completa? Observa la altura máxima y di cual es el radio de la noria. ¿Cómo calcularías la altura a los 130 segundos sin ampliar la gráfica?

- 5 Observa esta gráfica de la variación del **volumen** de agua respecto a la **temperatura**:



¿En qué intervalo el volumen decrece? ¿En cuál crece?
¿A qué temperatura el volumen de agua es mínimo?
¿En qué temperaturas alcanza el mismo volumen?

- 6 La siguiente gráfica refleja esta fórmula de Física: **Presión x Volumen = Constante**:
OX: Presión
OY: Volumen
Comenta la gráfica y su significado:



P.V=10

PRACTICAR

DIBUJAR GRÁFICAS

En los ejercicios siguientes, aparecen diferentes funciones. Contesta en cada uno de ellos a las preguntas que se formulan y en todos los casos haz una **tabla de valores** de la función correspondiente y **dibuja su gráfica**. Cuando la función venga dada como una descripción trata de encontrar también la fórmula, aunque esto no siempre te será posible.

1 Representa las **funciones** tales que:

- (a) A cada n° real le corresponde su doble.
- (b) A cada número, su inverso.
- (c) A cada número, su cuadrado
- (d) A cada número, su raíz cuadrada.

(d) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

(e) $g(x) = x^4 - 2x^2$

2 Un médico dispone de dos horas para atender a los pacientes que acuden a él cada día.

Si vienen dos personas, ¿Cuánto tiempo podrá dedicarle a cada una de ellas? ¿Y si vienen 5? ¿Y si son 120?

¿Cuántas personas podrá recibir si quiere estar exactamente 6 minutos con cada una de ellas?


Haz una gráfica de esta situación y halla la fórmula correspondiente.

3 Al proyectar una diapositiva sobre una pantalla, el área de la imagen depende de la distancia del proyector a la pantalla, de modo que cuando la pantalla está a 1 metro del proyector la imagen mide 20 cm x20 cm. ¿Cómo varía el área de la imagen cuando se aleja el proyector de la pantalla? Representa la función **distancia a la pantalla / área de la imagen**.

4 Dibuja varios rectángulos diferentes que tengan todos ellos un perímetro de 20 cm (o 20 cuadros del papel cuadriculado). Obtendrás, naturalmente rectángulos con distintas áreas. Haz una tabla de valores poniendo en cada caso los valores de la base y del área correspondiente. Si generalizas la cuestión obtienes una función. Haz su gráfica y halla su fórmula.

5 Dos **compañías de teléfonos** ofrecen diferentes tipos de tarifas urbanas: La compañía A cobra por tramos, a razón de 20 ptas. por cada 3 minutos o fracción. La compañía B cobra por segundos, a 3'33 ptas. el minuto, pero con un fijo de 10 ptas. por establecimiento de llamada. ¿Cuánto costará es cada compañía hablar durante 3 minutos? ¿Y durante 5? ¿Cuánto tiempo se puede hablar en cada una por 70 ptas.? Compara las gráficas de ambos casos.

6 El siguiente cuadro refleja las tarifas de Correos para el envío de cartas y tarjetas postales en 1998:



cartas y tarjetas
POR TRADICIÓN.

PESO (gr.) hasta	20	20	50	100	200	350	1.000	2.000
	Normaliz.	SN						
TARIFA (Pts.)	35	45	45	75	125	225	325	500

¿Es esto una función? ¿Cuáles son las magnitudes? ¿Y las unidades? Calcula cuanto cuesta enviar una carta de 74 gr. a Calatayud y haz una gráfica

7 Trata de estimar las gráficas de las siguientes relaciones funcionales:

- (a) En mujeres embarazadas: **Longitud del bebé**, medida mediante ecografía, / **días de gestación**.
- (b) En la vida de un hombre de 90 años: **Edad** en años / **estatura** en cm.
- (c) En una carrera de 100 metros lisos: **Tiempo de recorrido** en segundos / **velocidad** en metros por segundo.
- (d) En el llenado de una piscina: **Tiempo que lleva el grifo abierto** en minutos / **cantidad de agua** en la piscina en m^3 .
- (e) En el caso anterior: **Tiempo que lleva el grifo abierto** en minutos / **altura que alcanza el agua** en la piscina en metros.

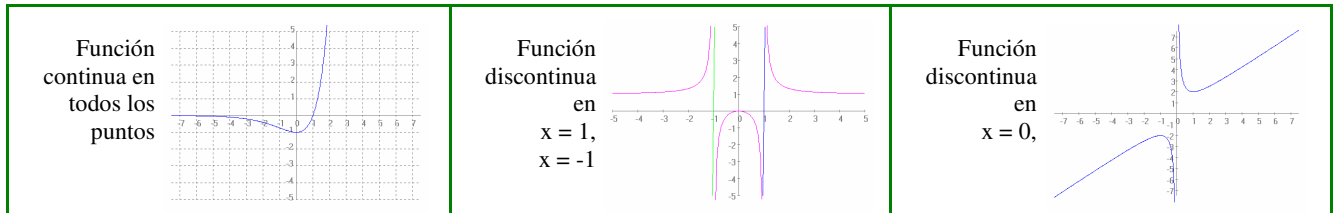
APRENDER

DOMINIO Y CONTINUIDAD

Se dice que una **función es continua** cuando la gráfica no presenta saltos bruscos, sino que va alcanzando todos los valores, por ejemplo, en el caso **tiempo/temperatura** en el que el tiempo toma todos los valores intermedios entre dos momentos dados (entre 1 minuto y 2 minutos hay infinitos valores intermedios) y la temperatura también (no se puede pasar de 12° a 18° con saltos, sino que se pasa por todas las temperaturas intermedias).

En el caso de que en algún punto de la función haya un salto, o que la función no exista en algún intervalo, diremos que la función es **discontinua**.

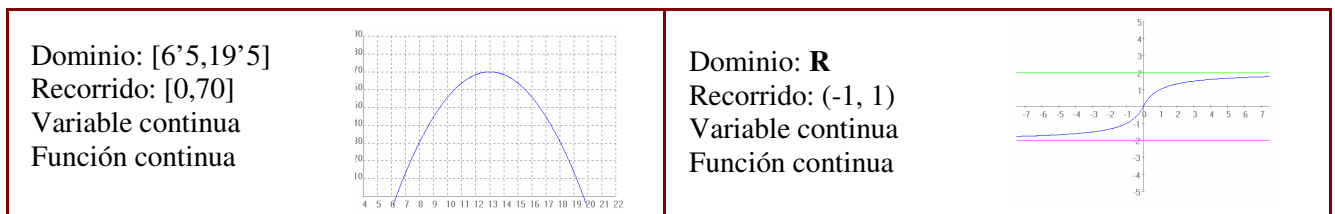
Veamos algunos ejemplos:



Una función es continua en un punto cuando la gráfica no presenta saltos, es decir, cuando para valores de "muy cercanos" a ese punto, toma valores de y "muy cercanos" a su imagen.

Se llama **dominio** de una función, al conjunto de valores de la variable independiente para los cuales existe la función. Se llama **recorrido** al conjunto de valores de la variable dependiente que alcanza la función

Es muy fácil estudiar la continuidad y ver cuales son el dominio y recorrido si la función está dibujada, por ejemplo en estos casos:



Cuando la función viene dada por una fórmula, puedes calcular el dominio en ciertos casos:

- 1 El dominio de $y = x^2$ es todo el conjunto de los números reales, pues para todos ellos existe su cuadrado.
Lo mismo ocurre con todos los polinomios.
- 2 El dominio de $y = \frac{1}{x-7}$ es el conjunto de todos los números reales menos el 7, pues para este valor el denominador vale cero y la operación es imposible.
- 3 El dominio de $y = \sqrt{4-x^2}$ es el intervalo $[-2, 2]$, pues para los números comprendidos en él, el radicando es positivo y existe la raíz cuadrada, pero para los demás números, como por ejemplo para $x=-3$, no existe, pues $\sqrt{4-9} = \sqrt{-5}$ no es un número real

PARA CALCULAR EL DOMINIO

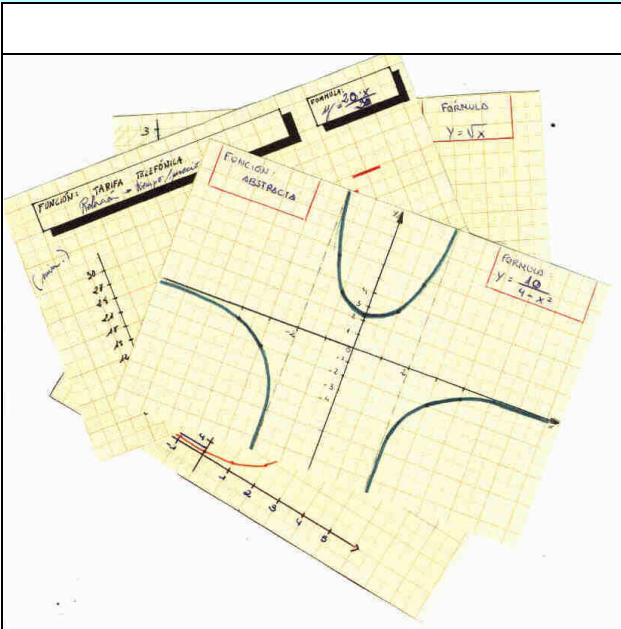
- 1º Si la función es un **polinomio**, el dominio es \mathbf{R}
- 2º Si la función tiene un **denominador**, la función no existe para los valores que lo anulan, es decir, el dominio es \mathbf{R} menos esos valores.
- 3º Si la función tiene una **raíz cuadrada**, la función existe cuando el radicando es positivo. Lo mismo ocurre en cualquier **raíz de índice par**. Si es **raíz de índice impar**, la función existe siempre.

(Pueden aparecer combinados los casos anteriores)

PRACTICAR

COLECCIONAR FUNCIONES

ORGANIZANDO LAS ACTIVIDADES



A la hora de realizar cualquier investigación o tarea de aprendizaje, es muy importante hacerlo de manera organizada, ordenada y precisa y a la hora de exponer los resultados hay que hacerlo con claridad.

A lo largo de todo el estudio de las funciones vamos a realizar una actividad que nos servirá para organizar el trabajo, ordenar y recordar los conocimientos que vayamos adquiriendo y, finalmente, mostrar todo lo que hemos hecho.

Haremos **fichas de papel milimetrado**, de tamaño 10 cm x 15 cm y dedicaremos una ficha a cada función. Por un lado pondremos la fórmula y la gráfica de la función y por el otro sus propiedades.

A medida que vayamos coleccionando funciones veremos que se pueden agrupar en distintas clases y las iremos ordenando.

En la pág. siguiente (49) hay un **guión** sobre la información que se puede incluir en cada ficha. Puede que no conozcas todavía algunos conceptos que aparecen en ese guión, pero estos se irán introduciendo en páginas y actividades sucesivas y podrás ir completando las fichas.

En la página 55 hay una larga **lista de tipos de funciones**. Al llegar allí podrás ordenarlas. Algunos de los tipos de funciones que aparecen allí te serán desconocidos aún, pero los irás descubriendo en las Unidades siguientes donde estudiarás a fondo los más importantes.

En esta actividad experimentarás mucho con funciones y comprenderás los conceptos y las técnicas principales para comprenderlas y utilizarlas. Además terminarás con una buena colección de apuntes y resúmenes que te serán muy útiles el resto del curso y en los próximos años, si sigues estudiando temas cercanos a las Matemáticas.

PARA EMPEZAR

Halla el dominio de las siguientes funciones y estudia su continuidad, tratando de dibujar las más sencillas dando valores

1 (a) $f(x) = \frac{1}{x-3}$ (b) $f(x) = \frac{7}{x+5}$

2 (a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ (b) $y = -2x + 3$

3 (a) $y = \frac{4x-8}{2x-1}$ (b) $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$

4 $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 - 9}$

5 (a) $y = \sqrt{x-3}$ (b) $y = \sqrt{2x+1}$

6 (a) $y = \sqrt[3]{x-3}$ (b) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

7 $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 10}$

8 $y = \sqrt{\frac{x-6}{x-2}}$

PRACTICAR

COLECCIONAR FUNCIONES

GUIÓN PARA LAS FICHAS DE FUNCIONES. Fichas en papel milimetrado.

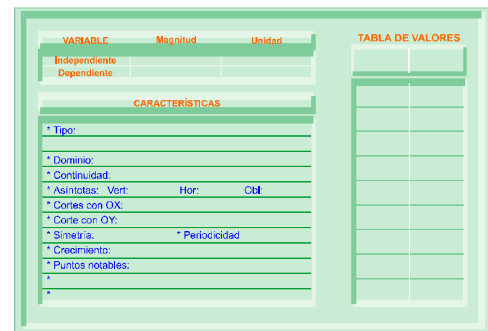
Anverso

Descripción y/o tipo de la función	Descripción o "abstracta" Experimental o determinada (tipo)
Fórmula	$y = f(x)$ o "desconocida" o "no tiene"
GRÁFICA	
Nombre de la gráfica	



Reverso

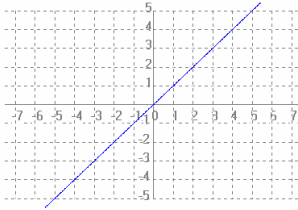
Características	Con significado: Magnitudes Unidades Cómo se obtiene Abstracta	
Propiedades	Dominio	
	Recorrido	
	Continuidad	Intervalos de continuidad Puntos de discontinuidad. Tipo
	Acotación	Superior. Máximo absoluto Inferior. Mínimo absoluto
	Cortes con los ejes	Cortes con OX Cortes con OY
	Signo de la función	Intervalos de función positiva Intervalos de función negativa
	Asíntotas y ramas parabólicas	Asíntotas Horizontales Asíntotas Verticales Asíntotas Oblicuas Ramas parabólicas
	Simetría	Respecto al eje OY, respecto al eje OX Respecto a O Otras
	Periodicidad	Período
	Crecimiento	Intervalos de crecimiento y decrecimiento Máximos y mínimos relativos
Observaciones	Utilidad	
	Historia	
TABLA DE VALORES		



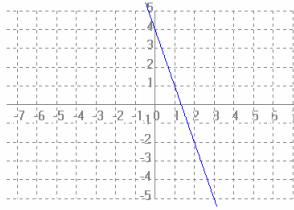


FUNCIONES LINEALES

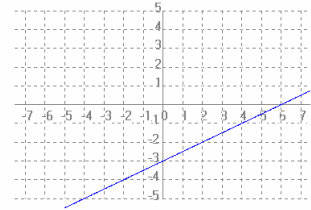
Como ya estudiaste en 3º, las funciones cuya fórmula es más sencilla son las de primer grado:



$y = x$



$y = -3x + 4$



$y = \frac{1}{2}x - 3$

Las funciones de la forma $y = a x + b$ se llaman lineales. Su gráfica es una recta. a se llama pendiente y b ordenada en el origen.

Hay muchas situaciones reales que corresponden a funciones de este tipo, como la del caso de la panadería, de la pág. 43, cuya ecuación es $y = 60x$, es decir, Precio = 60 x cantidad.

Esta podría ser una ficha para recordar las características de las funciones lineales:

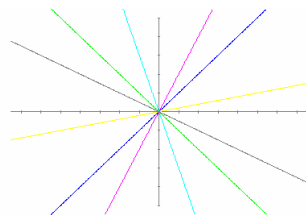
FUNCIÓN	Fórmula								
FUNCION LINEAL	$y = ax + b$								
<p>RECTA</p>	<table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>$a > 0$</td> <td>$a < 0$</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>$a = 0$</td> <td>$x = c$</td> </tr> </table>			$a > 0$	$a < 0$			$a = 0$	$x = c$
$a > 0$	$a < 0$								
$a = 0$	$x = c$								

$y = ax$, función lineal $y = ax + b$, función afin	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <th colspan="2">TABLA DE VALORES</th> </tr> <tr> <th style="width: 50%;">x</th> <th style="width: 50%;">y</th> </tr> <tr> <td colspan="2" style="padding: 5px;">basta dar dos valores</td> </tr> <tr><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td></tr> <tr><td> </td><td> </td></tr> </table>	TABLA DE VALORES		x	y	basta dar dos valores																	
TABLA DE VALORES																							
x	y																						
basta dar dos valores																							
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <th colspan="2">PROPIEDADES</th> </tr> <tr> <td>* Dominio: R</td> <td>Recorrido: R</td> </tr> <tr> <td>* Acotación: Sup: Max:</td> <td>Inf: mín:</td> </tr> <tr> <td colspan="2">* Continuidad: Siempre</td> </tr> <tr> <td>* Cortes: Con OX:</td> <td>Con OY:</td> </tr> <tr> <td colspan="2">* Signo de la función:</td> </tr> <tr> <td colspan="2">* Asintotas: No</td> </tr> <tr> <td>* Simetría:</td> <td>* Periodicidad No</td> </tr> <tr> <td colspan="2">* Crecimiento:</td> </tr> <tr> <td colspan="2">* Observaciones: El resto de datos depende de cada caso</td> </tr> </table>		PROPIEDADES		* Dominio: R	Recorrido: R	* Acotación: Sup: Max:	Inf: mín:	* Continuidad: Siempre		* Cortes: Con OX:	Con OY:	* Signo de la función:		* Asintotas: No		* Simetría:	* Periodicidad No	* Crecimiento:		* Observaciones: El resto de datos depende de cada caso			
PROPIEDADES																							
* Dominio: R	Recorrido: R																						
* Acotación: Sup: Max:	Inf: mín:																						
* Continuidad: Siempre																							
* Cortes: Con OX:	Con OY:																						
* Signo de la función:																							
* Asintotas: No																							
* Simetría:	* Periodicidad No																						
* Crecimiento:																							
* Observaciones: El resto de datos depende de cada caso																							

EJERCICIOS

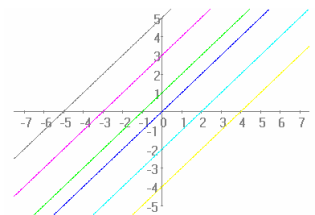
- 1 Representa las funciones: (a) $y = 3x + 6$
 (b) $y = -2x - 5$ (c) $y = 4$

- 3 Dibuja un “pendientímetro”, representando en papel milimetrado varias rectas de la forma $y = ax$. Investiga la relación entre el valor de a y la gráfica.



- 2 Escribe la ecuación del caso del revelado de fotos (ejemplo 2 de la página 43).

- 4 Dibuja varias rectas del tipo $y = x + b$, dando distintos valores a b . Investiga la Relación entre el valor de b y la gráfica.



- 5 Dibuja la recta que pasa por los puntos A(2, 7) y B(-1, -2) y halla la fórmula de esa función lineal.

- 6 ¿Cómo será la recta de pendiente 4 y que pasa por el punto A(0, 2)? Halla su ecuación. ¿Cómo será otra recta con la misma pendiente, que pase por B(1, -1)?

EXPERIMENTAR

FUNCIONES CUADRÁTICAS

Investigaremos ahora las **funciones de segundo grado**. En un grupo de tres o cuatro alumnas y alumnos, tratad de dibujar en papel milimetrado, dando valores, las gráficas de las siguientes funciones (podéis representar alguna entre todos y luego repartiros las demás):

1 $y = x^2$

2 $y = 2x^2$

3 $y = \frac{1}{2}x^2$

4 $y = -x^2$

5 $y = x^2 + 1$

6 $y = x^2 - 2$

7 $y = (x - 2)^2$

8 $y = (x + 1)^2$

9 $y = (x - 2)^2 - 3$

→ ¿Qué se observa? ¿Se parecen las gráficas? ¿Tienen algo en común?

→ ¿Cómo escribiríais, en general, una expresión para las cuatro primeras? ¿Y para las otras?

Continuad ahora representando, siempre dando valores y razonando, las siguientes funciones:

1 $y = x^2 - 4x + 3$

2 $y = x^2 - 6x + 8$

3 $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$

4 $y = -x^2 + 6x - 5$

5 $y = -x^2 + 5x + 6$

6 $y = -2x^2 + 12x - 16$

7 $y = 3x^2 - 12x$

8 $y = x^2 + 2x + 2$

9 $y = -x^2 - 3x - 7$

→ ¿Qué se observa ahora? ¿Se parecen las gráficas a las anteriores?

→ ¿Cómo escribiríais la expresión general de estas funciones? Inventad otras similares y representadlas.

Preparad un informe con el resultado de vuestras investigaciones, explicando todo lo que hayáis descubierto. Además, podéis apoyaros en las siguientes preguntas:

- ▣ ¿Son continuas? ¿Siempre?
- ▣ ¿Son simétricas?
- ▣ ¿Cortan siempre al eje OX? ¿Y al eje OY?
- ▣ ¿Hay relación entre el coeficiente de x^2 y el estilo de la gráfica
- ▣ ¿Hay algún punto especial en cada curva? ¿Cómo se puede obtener?

Ahora podéis usar el ordenador con uno de estos programas:



Funciones para Windows, de Jordi Lagares

Derive para Windows (o para MS-DOS)

Hoja de Cálculo MS-EXCEL

para representar las curvas que habéis dibujado y compararlas con las vuestras y para dibujar otras, cambiando de todas las maneras posibles los coeficientes (enteros, decimales, positivos, negativos...) y obtener más información para concluir el trabajo. También se puede hacer con la calculadora gráfica.

PROBLEMAS

RESOLVER ECUACIONES CON GRÁFICAS

Un buen método para **resolver ecuaciones** es el llamado **método gráfico**: Consiste en representar gráficamente una función definida a partir de la ecuación y observar y medir sus puntos de corte con el eje OX

Ciertamente, hemos resuelto ecuaciones de 1º y 2º grado por distintos métodos y resultaba bastante sencillo, pero merece la pena conocer este nuevo método porque sirve para **ecuaciones mucho más complicadas** y para ilustrar numerosas situaciones de la vida real. También sirve para resolver **sistemas de ecuaciones**.

Veamos algunos **ejemplos**:

- 1 Para resolver la ecuación

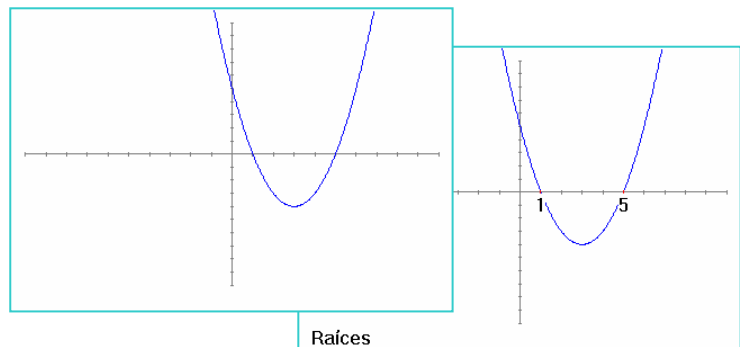
$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

tomamos la función

$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$

y la representamos.

Los puntos de corte de la función con el eje de abscisas son los valores que hacen $f(x) = 0$, es decir, las soluciones de la ecuación.



Raíces

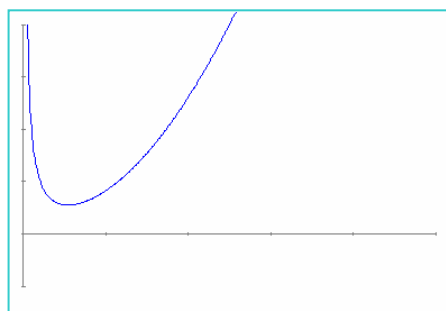
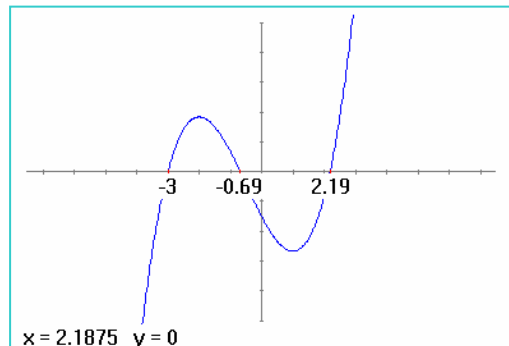
- 2 Para resolver la ecuación

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{3}{2} = 0$$

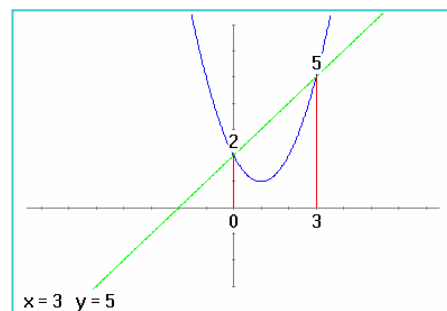
representamos la función

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{3}{2}$$

y hallamos los puntos de corte con el eje OX.



- 3 $2\pi x^2 + \frac{2}{x} = 0$



- 4 $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 - 2x + 2 \end{cases}$

EJERCICIOS

Resuelve analítica y gráficamente las siguientes ecuaciones y sistemas:

- (a) $3x - 7 = 0$ (b) $-x^2 + 4x + 5$ (c) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -3x + 8 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -x^2 + 3x - 5 \end{cases}$

APRENDER

CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES

Hay ciertas características y propiedades que permiten analizar y clasificar las funciones y que se refieren a los puntos especiales y a la forma y comportamiento de la curva. Su definición estricta requiere cierta práctica en el lenguaje matemático, por lo que se introducen aquí de manera intuitiva y visual.

VARIACIÓN Y ASÍNTOTAS

Puntos de corte con los ejes: Puntos de intersección de la curva con **OX** y **OY**.

Máximo relativo: Punto en que la ordenada toma un valor mayor que en un entorno suyo.

Mínimo relativo: Punto en que la ordenada toma un valor menor que en un entorno suyo.

Función creciente en un intervalo: A mayor valor de x corresponde mayor y .

Función decreciente en un intervalo: A mayor valor de x corresponde menor y .

Función cóncava en un intervalo: Vuelve su concavidad hacia arriba.

Función convexa en un intervalo: Vuelve su concavidad hacia abajo.

Punto de inflexión: Punto de cambio de concavidad.

Asíntota: Recta a la que se acerca la curva en el infinito. Hay tres tipos: **horizontal** ($x=a$), **vertical** ($y=b$) u **oblicua** ($y=ax+b$)

Rama parabólica: Rama sin asíntota.

ACOTACIÓN

<p>Función acotada inferiormente</p>	<p>Función acotada superiormente</p>	<p>Función acotada (sup. e inf.)</p>
		<p>Función no acotada</p>

SIMETRÍAS

<p>Función simétrica respecto del eje OY</p>	<p>Función simétrica respecto del origen</p>	<p>Función simétrica respecto del eje OX (en realidad hay dos funciones)</p>
--	--	--

PERIODICIDAD

Funciones periódicas: se repiten cada cierto intervalo llamado período

PRACTICAR

ORDENAR FUNCIONES

Aquí se presenta una clasificación de los distintos tipos de funciones, con algunas indicaciones para hacer y ordenar tu colección de fichas. Algunas no las conoces todavía y las trabajarás en las Unidades siguientes, pero puedes experimentar con la calculadora, que tiene teclas especiales para ellas.

Tipos de Funciones

Hacer

Función experimental	Observación de campo. Recogida de datos escritos. Recuento (Estadísticas)	Tomando datos de estos tres tipos, reales y simulados. En cada caso unas con la variable tiempo y otras sin ella.	
Función determinada	Con significado conocido Abstracta		Alguna de cantidad/precio, otras inventadas. Hacerlas y comentarlas.
Matemáticas	Funciones básicas Funciones por trozos Funciones en escalera Valor absoluto Parte entera		Todas Con trozos de rectas, parábolas Tarifas en escalera. De 1º y 2º grado. Varias posibilidades.

Funciones matemáticas básicas

Hacer

1	Lineales	Función nula Función idéntica Rectas	<p>Funciones básicas:</p> <p>De todos los tipos</p> <p>Bastantes rectas y parábolas</p> <p>Del 3 al 7, varias de cada tipo. Del 8 al 10, bastan algunas.</p> <p>En cada tipo hacer una ficha general, en cartulina de color con las características generales.</p> <p>En general: Pueden ser a mano, recortadas, con hoja de cálculo o programa de funciones</p> <p>Hacer también fichas/esquema con las propiedades de las funciones y cómo se estudian.</p>
2	Cuadráticas	Parábola	
3	Potencial	Cúbica Parábola semicúbica Cuártica Impar Par	
4	Polinómicas	Bicuada Con raíces enteras Otras	
5	Racionales	Proporcionalidad inversa. Hipérbola equilátera. Otras	
6	Exponenciales	Base e Base 10 Base a>1 Base a<1	
7	Logarítmicas	Neperiano Decimal Base a>1 Base a<1	
8	Circulares	Seno cosecante coseno secante tangente cotangente	
9	Circulares inversas	Arco seno Arco cosec Arco coseno Arco sec Arco tangente Arco cotg	
10	Irracionales	Raíz cuadrada. Raíces pares Parábola invertida (semi-) Círculo Elipse (semi-) Raíces impares.	

TRABAJO COLECTIVO

DAR LA LATA

CONCURSO DE DISEÑO

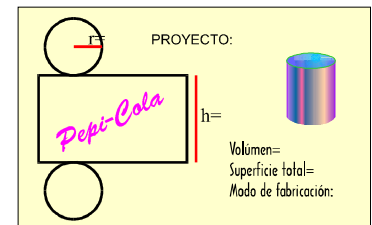
Imaginemos que cada miembro de la clase es ingeniero en una fábrica de bebidas. El presidente de la compañía quiere lanzar un nuevo producto y ha convocado un **concurso de diseño** para el envase.

Las condiciones que deben cumplir los envases son:

- 1º) Lata cilíndrica de aluminio.
- 2º) Capacidad exacta 333 cm^3 .

Cada ingeniero presentará un proyecto que consta de dos partes:

- 1) Un prototipo en cartulina de la lata, que puede presentarse ya decorado.
- 2) Una ficha con las características de la lata.



Una semana después de convocado este concurso, un jurado concederá el primer premio a la lata que más le guste, según su diseño y calidad de realización.

Además, la compañía hará un estudio conjunto de todos los proyectos presentados, con estas bases:

- 1) Se confeccionará en la pizarra una tabla conjunta como la de la derecha, donde cada ingeniero escribirá el nombre y datos de su prototipo.
- 2) A partir de esta tabla se hará una gráfica con la relación **radio/superficie** o bien **altura/superficie** y se escogerá en esta gráfica la opción de lata que tenga menor superficie.

NUEVA LATA: PROTOTIPOS				
NOMBRE	RADIO	ALTURA	VOLUMEN	SUPERFICIE
			333	
			333	

La compañía fabricará 2.750.000 latas mensuales de la lata mejor diseñada, pero adaptada al tamaño de menor superficie, para que el gasto de aluminio sea mínimo.

Para completar el estudio, cada ingeniero calculará cuánto costaría el aluminio necesario para fabricar su prototipo (sabiendo que el metro cuadrado de la chapa de aluminio cuesta al por mayor 243,25 ptas.) y cuánto costará el de la lata más barata, calculando también lo que la empresa ahorrará en un año al fabricar ésta en vez de su propio prototipo.



Por otra parte, una organización ecologista otorgará un diploma a los ingenieros que calculen, además, cuántos metros cuadrados de desechos de aluminio para reciclar se ahorrarán fabricando la lata de mínima superficie en lugar de la propia.



Puedes desarrollar este otro caso sólo o con algún compañero

Un granjero tiene 72 m de valla metálica para cercar un corral de gallinas de forma rectangular. ¿Cómo variará el área del corral al variar la longitud de uno de sus lados? ¿Qué medidas deberá tener el corral para que, con el mismo gasto de valla, el área sea máxima, es decir, las gallinas tengan la mayor superficie posible para picotear?

PROBLEMAS

DECIDIR CON GRÁFICAS

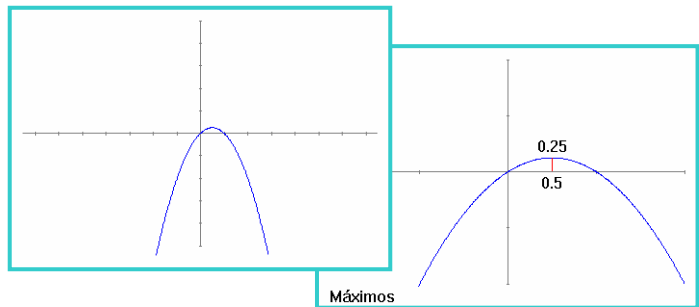
Una buena técnica para resolver problemas es **analizar gráficas y decidir sobre ellas**. Ante una situación que interesa resolver o mejorar, muchas veces se puede confeccionar una gráfica relacionando los datos correspondientes y hacerse una idea mucho más clara de la cuestión.

Ya hemos visto en la página 53 cómo se pueden hallar los **puntos de corte** de una función con el eje OX o los puntos de corte de dos o más funciones entre sí, lo cual sirve para resolver ecuaciones y sistemas. Pero a partir de la gráfica de una función podemos obtener mucha más información, como la **tendencia** en un punto dado o en el infinito, los puntos especiales de **máximo y mínimo**, etc.

Veamos algunos **ejemplos**:

- 1 **PROBLEMA:** Hallar un número tal que al restarle su cuadrado la diferencia sea máxima.

Podemos probar $4-4^2$, $1-1^2$, etc., pero también podemos escribir la función $f(x) = x - x^2$, dibujar su gráfica, que es una parábola, y encontrar con el ordenador su punto máximo. **Solución:** $x=0.5$

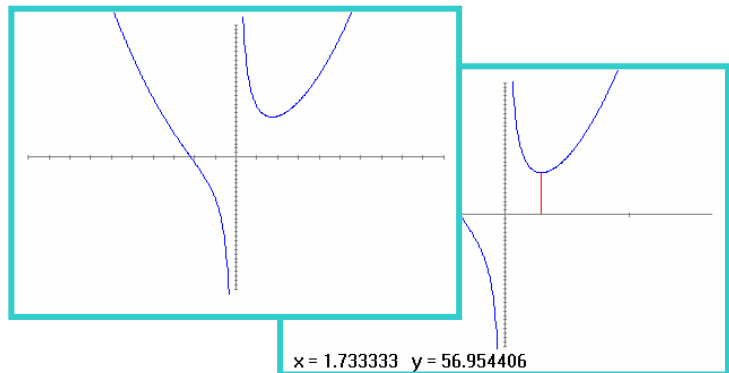


- 2 **SEGUIMOS DANDO LA LATA:** La función del **concurso de diseño** de latas de la pág. anterior, que relaciona la superficie con el radio es:

$$S(x) = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + \frac{66}{r}$$

¿Se parece a la vuestra? El punto mínimo de la gráfica corresponde a la lata que necesita menos aluminio. El ordenador da aproximaciones buenas para el radio (**x**) y la superficie (**y**). Los valores teóricos exactos

son: Radio=1.7382465, Superficie = 56,953948 Ese mínimo teórico se puede calcular ¡SIN DIBUJAR LA GRÁFICA! Si sigues estudiando Matemáticas aprenderás cómo.

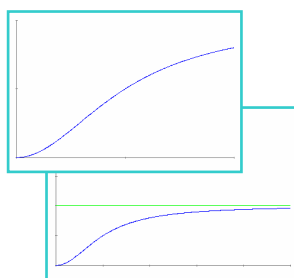


- 3 **INVASIÓN DE VIRUS:** Supongamos que un peligroso

virus se multiplica con la fórmula $N = \frac{2t}{1+t^2}$

¿Nos invadirá? NO.

Al principio crece muy rápidamente, pero enseguida se estabiliza el crecimiento a la altura de la recta $y=2$, que es la asíntota.



AHORA TU

Dibuja diversas gráficas en el ordenador y busca los puntos de máximo y mínimo y las tendencias en el infinito.



PROYECTOS

PARA SABER MÁS

Para completar este estudio sobre las funciones presentamos algunos **proyectos**, que son de carácter **voluntario** y puedes realizar individualmente o en grupo. Con ellos podrás profundizar en el tema de las funciones, viéndolas desde otros puntos de vista y obtener un mejor resultado en la **evaluación**. Varios de los proyectos requieren el uso de ordenadores y podrás realizarlos en el Aula de Informática o en tu casa. Puedes elegir el proyecto que más te guste o proponer otro que se te ocurra a ti.

1 - ¿FUNCIONA LA WEB?

Se trata de visitar **páginas en internet** buscando gráficas de funciones que puede hacerse con ellas.

*Para empezar puedes visitar la página del profesor americano Ramón Pfaff donde podrás ver parábolas jugando al golf y otras cosas que se mueven. La dirección es:



ppsa.com/explorescience/

* También puedes visitar: <http://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/history/Curves/Curves.html> donde te dibujan montones de curvas (las de la pág. 44 de esta Unidad están sacadas de ahí).

* Y puedes buscar en altavista.telia.com o en otro buscador las palabras **función**, **gráfica**, **continuidad**, etc. y diseñar tu mismo el itinerario de tu proyecto.

2 - CROMOS DIGITALES

Si has realizado una buena colección de fichas de funciones puede resultar sencillo y divertido hacer una presentación **multimedia** de las mismas.

Puedes realizar una página **html** enlazando las ecuaciones de las funciones con sus gráficas y añadiendo algunos comentarios con sus propiedades o tus ideas.

También puedes hacerlo, más vistoso, con el programa **Scala Multimedia**, ordenando las funciones por tipos y comparando unos con otros.

En los dos casos necesitarás tener las gráficas en formato digital, por ejemplo en **bmp**, o mejor en **gif** o **jpeg**. Puedes obtenerlas directamente con los programas **Derive** o **Funciones para Windows** o cogiéndolas de internet, para lo que te puedes aliar con otro grupo que se dedique a capturarlas con el proyecto nº 1.

Por fin, puede disponer de mucha información y textos directamente en el ordenador desde las enciclopedias en CD-ROM, como **Micronet**, **Salvat**, **Encarta** o **Planeta**.

3 - DIBUJA Y MIRA

Con los programas de ordenador que dibujan funciones que se citan en el proyecto 2 puedes realizar un estudio más completo, por ejemplo en esta línea:

- * Eliges un tipo de función (ver pag. 55)
- * Obtienes las gráficas más sencilla de ese tipo
- * Cambias x por $x+1$, $x+2$, ... , $x-1$, $x-2$, ...
- * Repites el proceso con x , $2x$, $3x$, ... , $\frac{1}{2}x$, ...
- * Luego mezclas ambas cosas: $2x+1$, ... , $ax + b$

Y observas y analizas lo que ocurre y preparas un pequeño informe con las gráficas y los comentarios correspondientes.

4 - OTRAS HISTORIAS

¿Quién inventó todo esto de las funciones? ¿Cómo lo hizo? ¿Para qué servía?

Bucea un poco por la historia navegando por la Biblioteca, en enciclopedias y libros y busca historias y anécdotas sobre las funciones, los matemáticos que las estudiaron. O bien busca en la vida real algún tipo de funciones, por ejemplo, parábolas.

Los libros de texto de distintas editoriales suelen tener páginas de entretenimiento que te pueden dar ideas.

De momento, aquí tienes la foto de **Leonard Euler**, que inventó la notación **$y = f(x)$**



5 - MÁS ÁLGEBRA

¿Te atreves a trabajar más con fórmulas y un lenguaje más preciso? Con algún libro adecuados y toda la ayuda del profesor puedes preparar un resumen de las definiciones y conceptos de funciones.

Estos proyectos son para trabajarlos despacio durante un período bastante largo de tiempo, con la dirección del profesor. Se empieza con una idea y se va avanzando poco a poco.

EVALUACIÓN

¿CÓMO VAS?

PRUEBA TUS CONOCIMIENTOS

1 Pon tres ejemplos de relaciones entre magnitudes que sean funciones y otras tres que no los sean.

2 Mandar un telegrama dejando constancia cuesta una tasa fija de 332 ptas. más 10 ptas. por cada palabra que se envíe. Dibuja una gráfica de la relación **cantidad de palabras / precio** y contesta a estas preguntas:

¿Cuánto cuesta enviar un telegrama con 23 palabras? ¿Y con 50? ¿Cuántas palabras puedes mandar con 500 ptas.?

Por otra parte, hay una oferta con la que se puede enviar un telegrama con una tasa fija de 413 ptas. sin añadir nada por las palabras, pero con un máximo de 30 palabras. Haz una gráfica de esto caso comparándolo con el anterior y analizando cuando interesa aplicar cada sistema.

3 Calcula el dominio de las funciones:

$$(a) f(x) = \frac{7x - 3}{-x^2 + 4x + 5}$$

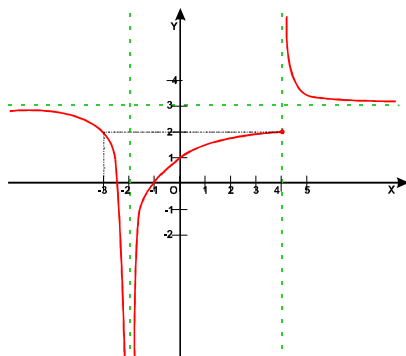
$$(b) g(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$$

$$(c) h(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 4x + 5}}$$

4 Estudia y representa gráficamente la siguiente función, indicando los puntos donde es discontinua:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x < -2 \\ x^2 - 4 & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \\ 10 - x & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

5 Analiza y comenta esta gráfica:



EVALÚA TU TRABAJO

CONOCIMIENTOS

	SI	NO
Leer gráficas	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Dibujar gráficas	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Propiedades	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Calcular dominios	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Representar rectas	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Representar parábolas	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Resolver ecuac. gráficamente	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

COLECCIÓN DE FUNCIONES

¿Cuántas fichas has hecho?

Generales	<input type="checkbox"/>
Rectas	<input type="checkbox"/>
Parábolas	<input type="checkbox"/>
Polinómicas	<input type="checkbox"/>
Racionales	<input type="checkbox"/>
Trozos, valor abs, etc.	<input type="checkbox"/>
Otras	<input type="checkbox"/>

PROYECTOS

	SI	NO
¿Has hecho tu lata?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
¿El cálculo fue correcto?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
¿Hiciste la gráfica?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
¿Participas en un proyecto?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Título del proyecto